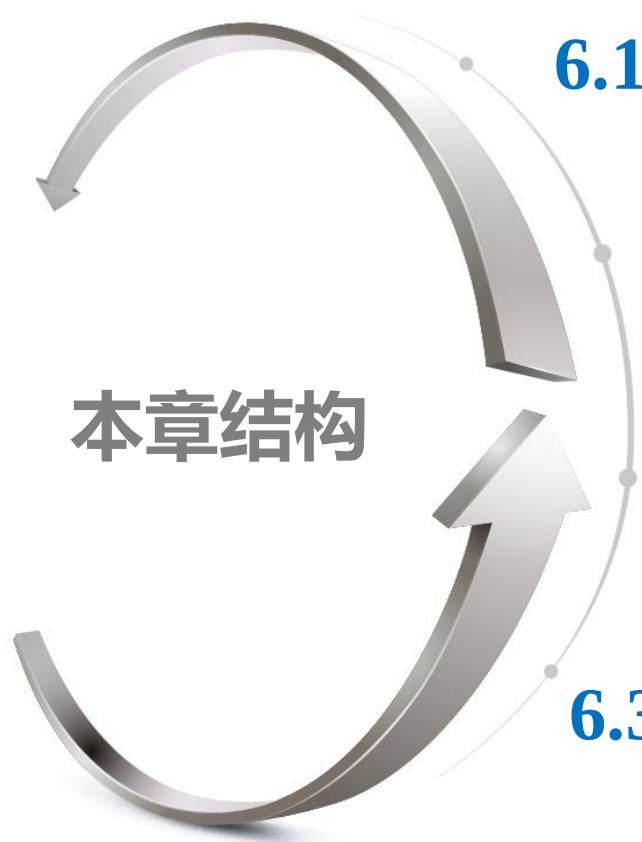


第六章 生产函数及其应用



管理学院
SUN YAT-SEN BUSINESS SCHOOL
SYSBS

毛蕴诗 教授
中山大学管理学院



6.1 典型的生产函数及其特性

6.2 生产函数用于资源投入最优决策分析

6.3 经验生产函数及其应用



6.1 典型的生产函数及其特性

6.2 生产函数用于资源投入最优决策分析

6.3 经验生产函数及其应用

6.1 典型生产函数及其特性



6.1.1 线性齐次函数的特性

- ✓ 性质1：线性齐次函数代表的生产过程的规模收益不变。

证明：设线性齐次函数为： $Q=f(L,K)$

令投入 L,K 同时扩大 λ 倍，则相应的产出为： $f(\lambda L, \lambda K) = \lambda f(L,K) = \lambda Q$

表明，投入同时扩大 λ 倍，产出也扩大 λ 倍，即规模收益不变

- ✓ 性质2：线性齐次函数可写为以下形式： $Q=Lg_1(K/L) = Kg_2(L/K)$

证明：因为 $f(L,K)$ 为线性齐次函数，对于任一常数 λ ，有： $f(\lambda L, \lambda K) = \lambda f(L,K)$

令 $\lambda=1/L$ ，可得： $f(\lambda L, \lambda K) = f((1/L) \times L, (1/L) K) = (1/L) f(L,K)$

或 $f(\lambda L, \lambda K) = f(1, K/L) = (1/L) f(L,K)$

再得： $L f(1, K/L) = f(L,K)$ ，记为： $f(L,K) = L \times f(1, K/L) = Lg_1(K/L)$

同理可证： $f(L,K) = Kg_2(L/K)$ ，故有： $f(L,K) = Lg_1(K/L) = Kg_2(L/K)$

6.1 典型生产函数及其特性



6.1.1 线性齐次函数的特性

- ✓ 性质3：偏微商 dQ/dL ， dQ/dK 是资本与劳动比率(K/L)的函数。

证明：由 $Q = L \times g_1(K/L)$ 对 L 求导可得：

$$\begin{aligned} dQ/dL &= g_1(K/L) + L \times g'_1(K/L) \times (d(K/L)/dL) = g_1(K/L) + L \times g'_1(K/L) \times (-K/L^2) \\ &= g_1(K/L) - L \times g'_1(K/L) \times (K/L^2) = g_1(K/L) - (K/L) \times g'_1(K/L)。 \end{aligned}$$

此即 K/L 的函数。

同理，就 $Q = L \times g_1(K/L)$ ，对 K 求导可得： $dQ/dK = g'_1(K/L)$ ，亦即 K/L 的函数。

- ✓ 性质4：劳动与资本的平均与边际产出仅取决于两投入之比，而不是投入量。

证明：就边际产出而言，已在性质3中获得证明；就劳动的平均产出而言，

因为： $f(L/L, K/L) = f(1, K/L) = h_1(K/L)$ ，而 $f(L/L, K/L) = (1/L) \times f(L, K) = Q/L$

所以： $Q/L = h_1(K/L)$ ，同理，资本的平均产出为：

$Q/K = f(L/K, K/K) = f(L/K, 1) = h_2(L/K)$ ，证毕。

6.1 典型生产函数及其特性

6.1.2 柯布—道格拉斯生产函数

• 柯布-道格拉斯生产函数的一般形式

- ✓ 一般形式： $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$
- ✓ Q 表示产出量， L 表示劳动投入量； K 表示资本投入量； A 表示常数。 α 与 β 为正的参数。

• 柯布-道格拉斯生产函数的性质

- ✓ 性质1：如果一种投入为零，产出也为零；
- ✓ 性质2： α 和 β 分别是产出对于劳动和资本的偏弹性。

证明：由 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$ ，对 L 求偏导数得： $dQ/dL=AQ=A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}$

按点弹性的定义，产出对劳动的点弹性：

$$\varepsilon_{QL}=(dQ/dL) \times L/Q=A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}L/Q=\alpha AL^{\alpha}K^{\beta}/Q=\alpha$$

同理可得，产出对于资本的偏弹性： $\varepsilon_{QK}=\beta$



6.1 典型生产函数及其特性

6.1.2 柯布—道格拉斯生产函数

• 柯布-道格拉斯生产函数的性质

✓ 性质3：其规模收益取决于 $\alpha+\beta$ 的值

证明：分别将原投入量 L ， K 扩大 λ 倍，并带入生产函数得：

$$Q=A (\lambda L)^{\alpha} (\lambda K)^{\beta}=A \lambda^{\alpha} L^{\alpha} \lambda^{\beta} K^{\beta}= \lambda^{\alpha+\beta} (AL^{\alpha}K^{\beta})= \lambda^{\alpha+\beta}Q$$

当 $\alpha+\beta=1$ 时， $\lambda^{\alpha+\beta}=\lambda$ ，故规模收益不变；

当 $\alpha+\beta<1$ 时， $\lambda^{\alpha+\beta}<\lambda$ ，故规模收益递减；

当 $\alpha+\beta>1$ 时， $\lambda^{\alpha+\beta}>\lambda$ ，故规模收益递增。



6.1 典型生产函数及其特性

6.1.3 生产函数的估计方法

对于线性齐次型生产函数：

$$Q=a_0+a_1L+a_2K+a_3I+a_4T$$

可以直接采用普通最小二乘法，用计算机应用软件估计 a_0 ， a_1 ， a_2 ， a_3 ， a_4 。

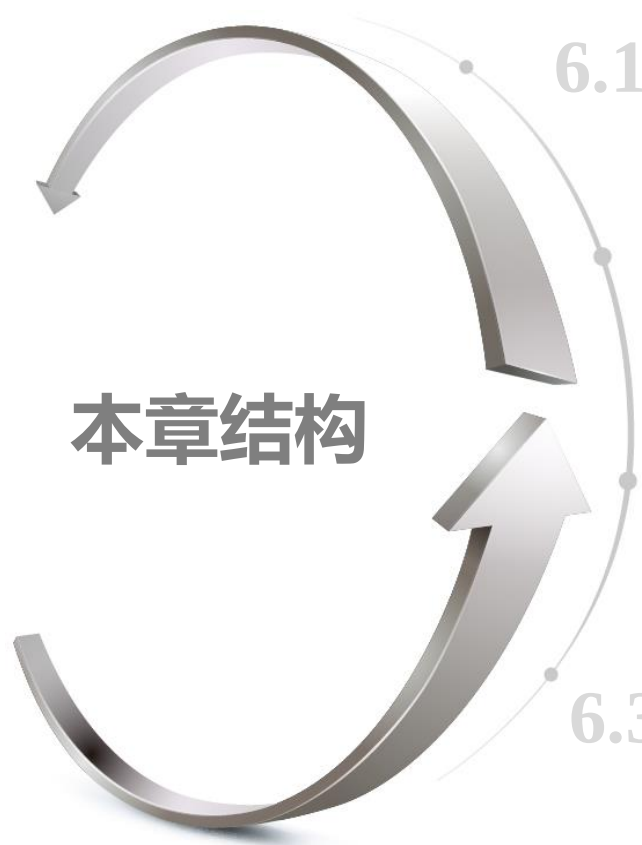
由于柯布—道格拉斯生产函数是指数型函数，因此往往把

$$Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$$

两边取对数化为：

$$\log Q=\log A+\alpha\log L+\beta\log K$$

再用普通最小二乘法估计 α ， β ， $\log A$ ，并进一步算出 A ，即可得出柯布——道格拉斯生产函数的具体形式。



6.1 典型的生产函数及其特性

6.2 生产函数用于资源投入最优决策分析

6.3 经验生产函数及其应用

6.2生产函数用于资源投入最优决策分析



6.2.1 决策——最大利润还是最高产量

企业的最大产出量往往并不等同于它获得最大利润的产出量。

6.2.2 生产过程中不同资源投入的最优组合

✓ 产出最大化 - 无资源约束

对此，可以用一般的极值问题求解，并导出相应的投入的边际产出为零的原则。

设生产过程有两种投入 X_1 ， X_2 ，生产函数

$$Q=f(X_1,X_2),$$

则产出最大的投入组合（ X_1 ， X_2 ）应满足：

$$f'_{X_1}(X_1, X_2)=MP_{x_1}=0$$

$$f'_{X_2}(X_1, X_2)=MP_{x_2}=0$$

6.2生产函数用于资源投入最优决策分析



6.2.2 生产过程中不同资源投入的最优组合

✓ 产出最大化 - 有资源约束

资源约束条件下的产出最大化，其生产过程中资源投入的最优组合问题是根据拉格朗日乘数法求解的，即所谓条件极值问题。

假设生产过程需要几种不同的资源（ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ），其价格相应为（ $P_{x1}, P_{x2}, P_{x3}, \dots, P_{xn}$ ），部门的总预算费用为TC，可以导出各种资源投入的最优组合必须满足下列两个条件：

$$X_1P_{X1} + X_2P_{X2} + X_3P_{X3} + \dots + X_nP_{Xn} = TC$$

$$MP_{X1}/P_{X1} = MP_{X2}/P_{X2} = \dots = MP_{Xn}/P_{Xn}$$

6.2生产函数用于资源投入最优决策分析

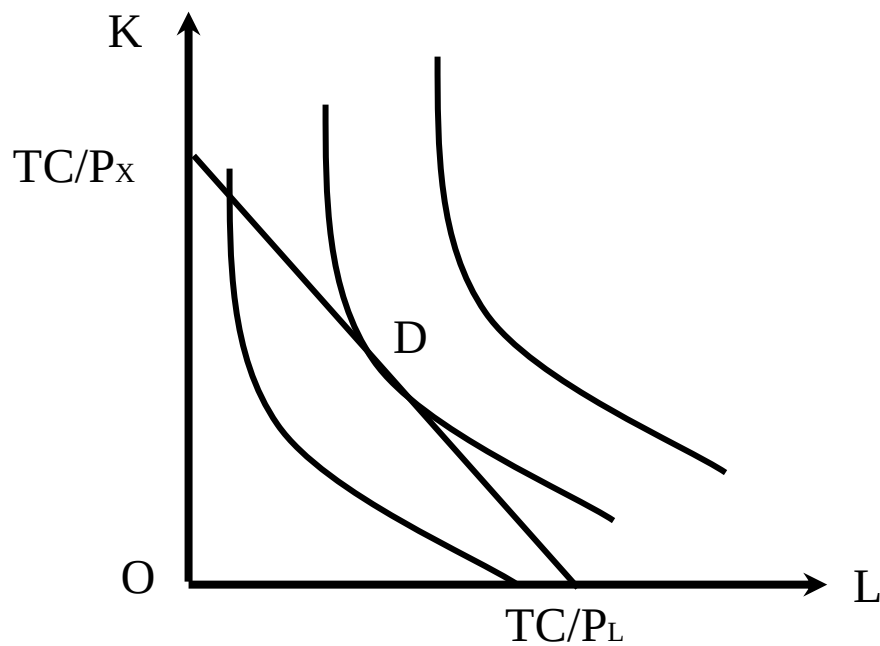


6.2.2 生产过程中不同资源投入的最优组合

✓ 等成本线与几何图示

可能的投入组合 (K, L) 满足方程：

$$P_K K + P_L L = TC$$



等成本线

✓ 利润最大化

设生产函数为 $Q=f(x)$ ，产出 Q 的价格为 P_Q ，投入的价格为 P_X ，则利润函数 $\pi = P_Q Q - P_X X$ 。使得利润最大的条件为边际利润为零。

$$\frac{d\pi}{dX} = P_Q \frac{dQ}{dX} - P_X = 0$$

$$\text{则 } \frac{dQ}{dX} = \frac{P_X}{P_Q}$$

满足上式的投入量 X 可获最大的利润

6.2 生产函数用于资源投入最优决策分析



6.2.2 生产过程中不同资源投入的最优组合

✓ 近似求解问题

在实际中，要求得某部门的收益函数往往是相当困难的，除需要有足够的历史资料或技术资料外，还得借助某些数学方法。

在许多情况下，花费很大代价去求得收益函数本身就不经济。因此，实际求解问题时，所用的收益函数大多数都是近似的。

6.2生产函数用于资源投入最优决策分析



6.2.2 生产过程中不同资源投入的最优组合

某生产过程的投入、产量、边际产量与平均产量

投入量	产量	边际产量MP	平均产量AP
0	0		
		$5 = (50 - 0) / (10 - 0)$	
10	50		$50 / 10 = 5$
		$5 = (100 - 50) / (20 - 10)$	
20	100		$100 / 20 = 5$
		$6 = (160 - 100) / (30 - 20)$	

6.2生产函数用于资源投入最优决策分析

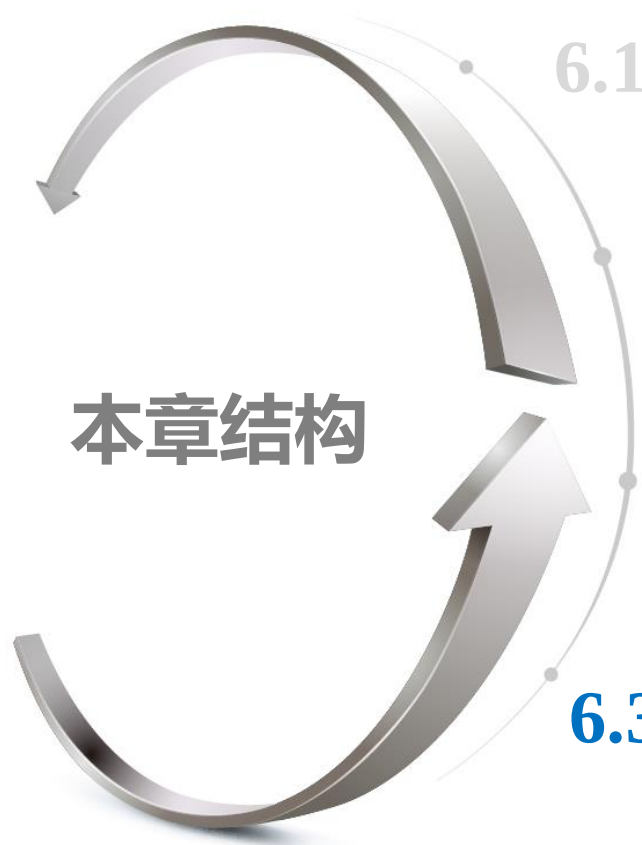


6.2.2 生产过程中不同资源投入的最优组合

某生产过程的投入、产量、边际产量与平均产量

(续表)

投入量	产量	边际产量MP	平均产量AP
30	160		$160/30=5.33$
		$2 = (180-160) / (40-30) > 0$	
40	180		$180/40=4.5$
		$-2 = (160-180) / (50-40) < 0$	
50	160		$160/50=3.2$
		$-4 = (120-160) / (60-50)$	
60	120		$120/60=2$



6.1 典型的生产函数及其特性

6.2 生产函数用于资源投入最优决策分析

6.3 经验生产函数及其应用



6.3 经验生产函数及其应用

6.3.1 水浇地玉米施用氮肥的收益函数及其应用——一种可变投入的实例

- ✓ 收益函数： $Q=65.54+1.084X-0.003X^2$
- ✓ 最大产出的施肥量： $MP=dQ/dX=1.084-0.006x=0$
- ✓ 引入玉米和肥料价格后的投入决策： $MP=P_X/P_Q$

6.3 经验生产函数及其应用



6.3.1 水浇地玉米施用氮肥的收益函数及其应用——一种可变投入的实例

在玉米与氮肥不同价格下每英亩最佳施肥量

氮肥每磅 价格 (\$)	每蒲式耳玉米价格				
	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50
0.05	175	176	177	178	178
0.10	170	172	174	175	176
0.15	164	168	171	172	174
0.20	158	164	167	170	171
0.25	153	160	164	167	169
0.30	147	156	161	164	166
0.35	142	151	157	161	164
0.40	136	147	154	158	162

6.3 经验生产函数及其应用



6.3.2 牛奶的生产函数及其等产量线——两种可变投入的实例

投入与产出问题及其假定

- ✓ 牛奶是生产过程的产出。
- ✓ 牛被视为唯一的固定投入，而没有考虑其他的固定投入，如建筑物、场地等。
- ✓ 只考虑了两种可变投入，而没有考虑其他的固定投入，如劳动力等。
- ✓ 研究只着重于投入与产出之间的实务关系，而未考虑价格，如投入价格的变化和资本投向其他部门的收益。

估计结果

$$M = -340.1 + 1.5437H + 2.9740G - 0.001192G^2 - 0.00388H^2 - 0.001056HG$$

6.3 经验生产函数及其应用



6.3.2 牛奶的生产函数及其等产量线——两种可变投入的实例

经济分析

- ✓ 干草、谷物的边际产量

$$MP_h = 1.5437 - 0.000776H - 0.001056G$$

$$MP_g = 2.974 - 0.002384G - 0.001056H$$

- ✓ 牛奶的生产曲面

①干草和谷物的边际产量在很大一个范围内为正，因而随其投入的增加，产出也将增加。

②如前面所分析，干草和谷物有边际产量递减的特征，因此，生产既定产量牛奶所需要的干草和谷物不同组合的等产量曲线是一斜率为负的曲线。

6.3 经验生产函数及其应用



6.3.2 牛奶的生产函数及其等产量线——两种可变投入的实例

从牛奶生产函数可以推导出牛奶的等产量方程，这可以将H从生产函数中解出并表示为G和M的函数：

$$H=1.989.36-13608G+1288.66 (1.8556+0.001355G-0.000000736G^2-0.001552M)^{1/2}$$

③ 谷物代替干草的边际技术替代率

$$MRTS=-(2.974-0.002384G-0.001056H)/(1.5437-0.00776H-0.001056G)=r$$

若令边际替代率MRTS等于谷物与干草的比价，即 $MRTS=PG/PH=r$ ，则可求解出H并表示为G和上述比价r的函数：

$$H=[(-2.974+1.5437r)+(0.002384-0.001056r)G]/(-0.001056+0.00776r)$$

6.3 经验生产函数及其应用



6.3.3 应用生产函数于决策分析时应注意的问题

本节作介绍的资源分配最优组合的确定，主要是根据数学分析中的求解条件极值问题的基本原理和方法进行的。但是作为一种特定的数学模式，它的运用是有一定的范围和条件的。特别是由于现实经济现象很复杂，许多因素相互作用、相互影响，因此在具体运用这一原理时，应当考虑部门外某些因素的影响。这实质上涉及到运用原理的前提条件问题。

感谢聆听·欢迎交流



管理学院
SUN YAT-SEN BUSINESS SCHOOL
SYSBS

毛蕴诗 教授
中山大学管理学院